11.

MEMORIA

SOBRE LA FORMA MAS CONVENIENTE

DE LOS TRIÁNGULOS GEODÉSICOS,

POR

EL SEÑOR DON ANTONIO TERRERO,

Académico numerario en la Seccion de Ciencias exactas.

Mucho se ha escrito acerca de la forma que mas conviene dar á los triángulos geodésicos. Cotes, Bouguer, Cagnoli, Delambre y otros han resuelto, ó han creido al menos resolver esta cuestion verdaderamente importante; y sin embargo, creemos falte aún no poco que decir en ella.

Puissant, Francoeur, Salneuve y varios modernos, suponiendo estar bien medida ó calculada la base b de uno de estos triángulos, y que en uno mismo ó en contrarios sentidos se hubiesen cometido en la observacion de sus ángulos, los errores iguales $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle C$, concluyen que debe ser equilátero el triángulo para que sean mínimos los errores

$$(1)\ \triangle a = a\ (\text{Cot}.A - \text{Cot}.B)\triangle A,\quad (3)\ \triangle a = \frac{2\ \text{Sen}.\ (A+B)\triangle A}{\text{Cos}.\ (A-B) - \text{Cos}.\ (A+B)}$$

$$(2)\ \triangle c = c\ (\text{Cot}.C - \text{Cot}.B)\triangle C,\quad (4)\ \triangle c = \frac{2\ \text{Sen}.\ (C+B)\triangle C}{\text{Cos}.\ (C-B) - \text{Cos}.(C+B)}$$

que resulten en los lados a y c (*) cuando se calculen con estos datos erróneos.

(*) Los (1) y (2) para cuando $\triangle A = \triangle C = \triangle B$, y los (3) (4) para $\triangle A = \triangle C = -\triangle B$.

Algun tanto gratuita nos parece en verdad la suposicion á que ha tenido que recurrirse para obtener estos resultados, si bien la razon confirmada por la espcriencia induce á creer probable, que mientras no varien el goniómetro y el observador, resulten aproximados, pero siempre en el mismo sentido, los errores $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle C$. Por esto y con razon dice el General Piobert, *que semejantes soluciones de casos hipotéticos no son aplicables á operaciones geodésicas delicadas.*

Como para venir á estas ecuaciones haya tenido que sustituirse por los senos y cosenos de $\triangle A$, $\triangle C$ y $\triangle B$, que no son infinitamente pequeños, los primeros términos de sus desarrollos, y que despreciarse además los $\triangle a \triangle B$ Cos. B y $\triangle c \triangle B$ Cos. B, que tampoco lo son de segundo orden; no puede en rigor concluirse de las (1) y (2) que tanto menores serán $\triangle a$ y $\triangle c$ cuanto mas se aproximen á ser iguales A, C y B, y que $\triangle a = \triangle c = 0$ cuando $A = C = B$; aunque sean estas otras tantas verdades demostradas exactamente por las espresiones

$$\triangle a = \frac{\text{Sen. } (A + \triangle A)}{\text{Sen. } (B + \triangle B)} \cdot b - a, \quad \triangle c = \frac{\text{Sen. } (C + \triangle C)}{\text{Sen. } (B + \triangle B)} \cdot b - c.$$

No hay, pues, duda en que mientras fuesen relativamente iguales los errores cometidos en la observacion de los ángulos, el triángulo equilátero daria con exactitud el valor de sus lados, y tanto menos diferentes de ellos cuanto mas se aproximase á dicha forma.

Pasemos á las ecuaciones (3) (4). Puissant y Francoeur deducen tambien de ellas, que serán mínimos los valores de $\triangle a$ $\triangle c$ cuando $A = C = B$. Refiriéndonos á la (3) se ve, que la condicion $A = B$ no es seguramente suficiente para el mínimo valor de $\triangle a$ entrando dos indeterminadas A y B en su espresion; ó como dice Piobert, si $\triangle a$ disminuye con $A - B$ tambien disminuyen cuando se acerca $A + B$ á 0° ó 180°. Facilmente se ve que el menor valor de $\triangle a$ exije además la condicion de $A + B = 180°$. Las condiciones precisas son, pues, $A = 90°$, $B = 90°$. Volviendo á considerar finitos los valores de $\triangle A$, $\triangle B$, la espresion

$$\triangle a = \frac{\text{Sen. } (A + \triangle A)}{\text{Sen. } (B + \triangle B)} \cdot b - a$$

exije únicamente para el menor valor de $\triangle a$ que $A + B = 180°$. Ahora

bien, no siendo posible satisfacer á la vez en un triángulo finito á las dos condiciones $A=90°$, $B=90°$, ni á la única $A+B=180°$, al aproximarnos á esta última ¿con cuál de aquellas deberá cumplirse y á cuál podrá faltarse? ¿O deberá acaso faltarse á ambas, aproximándose hasta cierto grado á una y á otra? ¿Cómo se atenuará á la vez el error $\triangle c$, y hasta qué grado convendrá disminuirlo? He aquí las cuestiones que resta aún dilucidar.

El citado General Piobert emprende otro camino para resolver esta cuestion. Consiste en determinar la desfiguracion del triángulo, cifrada en la razon del desvío de su vértice á su altura, y que sería aún mejor á su base constante b. No entraremos en los pormenores de su cálculo, cuyos resultados tampoco podemos aceptar como derivados de una verdadera equivocacion; tal es el considerar como diferenciales de los lados del triángulo á los del paralelógramo diferencial formado en el movimiento de desfiguracion, ó sea en el desviamiento de los lados. De aquí resulta que todas sus deducciones están basadas en las espresiones

$$D=\sqrt{da^2+dc^2+2dadc \text{ Cos. } B}$$

$da \text{ Sen. } B.=c \text{ Sen. } dA,\ dc \text{ Sen. } B=a \text{ Sen. } dC$

siendo realmente

$$D=\frac{\sqrt{da^2+dc^2-2da\ dc \text{ Cos. } B}}{\text{Sen. } B}$$

$da \text{ Sen. } B=c \text{ Sen. } dA+a \text{ Cos. } B \text{ Sen. } dC,\ dc \text{ Sen. } B=a \text{ Sen. } dC+ c \text{ Cos. } B \text{ Sen. } dA.$

Aunque el sistema ideado por Piobert sea sin disputa el mas adecuado para estimar la precision con que las operaciones geodésicas se prestan á determinar la posicion de un punto con relacion á una base visible desde él, no le creemos sin embargo á propósito para cuando este punto deba ligarse á la base por una cadena de triángulos. En este caso es preciso determinar la forma mas conveniente de estos triángulos, para que resulten atenuados por ella los errores de los la-

dos, que son los que se propagan creciendo de uno en otro hasta reunirse en los últimos, tanto mas abultado cada uno cuanto mayor fuese el número de triángulos por donde hubiese pasado, y menos favorable la configuracion de estos. Verdad es que tambien se reunen en los azimuts de los últimos lados los errores cometidos en los ángulos, pero estos son los de observacion, que ni aumenta ni disminuye la forma de los triángulos. He aquí por qué se dice generalmente que *son mas perjudiciales los errores ocasionados en la medicion de la base, ó los que resultan en los lados, que los cometidos en la observacion de los ángulos;* debiendo entenderse esto en el concepto que los de los ángulos afecten muy poco ó nada á los lados, pues de lo contrario tan perjudiciales vendrian á ser los unos como los otros.

La geodesia por otra parte debe calcular en último resultado, y procediendo de estacion en estacion, las latitudes y longitudes de todos los vértices; y si se examinan atentamente las fórmulas preparadas al efecto, se verá que su exactitud descansa esclusivamente en las observaciones astronómicas hechas en una primera estacion, en las de los ángulos de la red ó cadena, y por último en la del valor del lado que liga la estacion ya determinada con la que se quiere conocer.

Así pues, la desviacion del vértice que conviene atenuar con la forma del triángulo, es precisamente la que tiene lugar en la direccion de cada uno de los lados; esto es, los errores que en ellos resultan.

El método del General Piobert podria ser útil, siempre que se determinase la cadena que diera menos desfigurado el triángulo que ligase la base medida con el último vértice.

Hemos dicho que restaba aún averiguar á cuál de las condiciones $A=90°$, $B=90°$ habia de faltar el triángulo, ó cuánto debiera separarse de ambas. Con este objeto debe apreciarse aisladamente la influencia que en los lados tiene el error cometido en cada uno de los ángulos. Supongamos que en la medicion del ángulo A sobre la base se hubiese cometido un error $\triangle A$. El que resultaría al lado opuesto a por entrar en el cálculo $A+\triangle A$ en vez de A sería:

$$\triangle a = \frac{b \text{ Sen. } A \text{ Cos. } \triangle A}{\text{Sen. } B} + \frac{b \text{ Cos. } A \text{ Sen. } \triangle A}{\text{Sen. } B} - a.$$

Haciendo Sen. $\triangle A = \triangle A$, Cos. $\triangle A = 1$

$$\triangle a = \triangle A \frac{b \text{ Cos. } A}{\text{Sen. } B}$$

donde se ve, que tanto menor será $\triangle a$ cuanto mas se aproximen á restos los ángulos A y B.

Del mismo modo, para atenuar los efectos que sobre el lado c debe ocasionar un error cometido en el otro ángulo C tambien sobre la base, convendria se aproximasen á restos los C y B.

Averigüemos ahora si un error $\triangle B$ en el ángulo B opuesto á la base exije alguna condicion para atenuar los que deben producirse en los lados a y c. Para esto tendremos que

$$\triangle a = \frac{\text{Sen. } A}{\text{Sen. } (B + \triangle B)} \cdot b - a, \quad \triangle c = \frac{\text{Sen. } C}{\text{Sen. } (B + \triangle B)} \cdot b - c$$

Quitando divisores, desarrollando y desestimando los términos de segundo orden

$$\triangle a = -\triangle B \frac{a \text{ Cos. } B}{\text{Sen. } B}, \quad \triangle c = -\triangle B \frac{c \text{ Cos. } B}{\text{Sen. } B}$$

vemos pues que conviene sea recto el ángulo B.

Los mismos resultados se obtienen considerando al triángulo como esférico, y resolviéndolo por la regla de los cuatro senos, por el método de Delambre, ó por el que está mas en uso y es debido á Legendre.

Conviene pues, que los triángulos sean ó se aproximen á trirectángulos; mas lejos de ser esto posible, la corta estension que cada uno ocupa sobre la superficie de la esfera es causa de que apenas difieran de los rectilíneos, siendo casi inapreciable su esceso esférico. De aquí, que como el ángulo opuesto á la base ó lado conocido merezca una particular consideracion, porque no solo influye esclusivamente y con mas eficacia que los formados sobre esta en la propagacion de sus propios errores, sino que contribuye además tanto como estos al acrecentamiento de los que en ellos se hubiesen cometido, convendrá aproximar dicho ángulo á recto con preferencia á los otros dos.

No es posible dar una solucion terminante y general al problema que nos ocupa. La dificultad que para ello se encuentra proviene, de

que dependiendo la forma que buscamos de la relacion entre los mismos errores inevitables y desconocidos $\triangle A$, $\triangle B$ y $\triangle C$ no es posible obtener un resultado independiente de ellos mientras no se haga alguna suposicion que los elimine; y de que cuando no quedan completamente destruidos los $\triangle a$ y $\triangle c$ que resultan en los lados a y c, la forma que favorece al uno perjudica al otro, y es además preciso en este caso vayan creciendo los triángulos en el principio de las cadenas, para que siendo menor su número no se multipliquen los errores inherentes á las observaciones, ni lleguen muy abultados á los últimos lados los cometidos en los primeros si se propagan estos en progresion creciente.

La suposicion $\triangle A = \triangle B = \triangle C$, da en el triángulo equilátero con exactitud los lados a y c, y bajo tal concepto esta forma satisface á todas las condiciones, y es sin disputa la mejor: mas por probable que sea la proximidad de los errores angulares, sería muy aventurada la hipótesis de su igualdad, para establecerla como un principio en operaciones geodésicas de alguna importancia.

La de que sean muy pequeños dichos errores angulares $\triangle A$, $\triangle B$ y $\triangle C$ nada tiene de gratuita, porque así lo exije la delicadeza con que deben hacerse las operaciones de este género, y partiendo solo de ella se deduce ser la forma rectangular la que mas conviene. No es difícil deducir de la ecuacion $\triangle a = a\ (\triangle A \text{ Cot. } A - \triangle B \text{ Cot. } B)$ que sobraría fuese $\triangle B < -{}^{3}/_{4}\triangle A$ para que diera el triángulo rectángulo isósceles con mas aproximacion los lados que el equilátero, y que el máximo error que puede dar este, escede en 0,1339 de su valor al que llega á producir aquel.

Si hacemos $A = B = {}^{1}/_{3}\,\pi$ resulta

$$\triangle_1\, a = a \text{ Cot. } {}^{1}/_{3}\,\pi\ (\triangle A - \triangle B)$$

y si $A = {}^{1}/_{4}\,\pi \quad B = {}^{1}/_{2}\,\pi$

$$\triangle_2\, a = a \triangle A.$$

Para que sea $\triangle_1\, a > \triangle_2\, a$, basta que

$$\text{Cot. } {}^{1}/_{3}\,\pi\ (\triangle A - \triangle B) > \triangle A$$

y con mas razon que

$$\triangle B < -{}^{3}/_{4}\, \triangle A.$$

Si representamos con $\triangle A$, $\triangle B$ los valores absolutos de estos errores, y admitimos que puedan tener signos contrarios

$$\pm \triangle B < \mp {}^{3}/_{4} \triangle A$$

de donde resultan las dos combinaciones posibles y relativas á $\triangle B < 0$, $\triangle A < 0$

$$\triangle B < {}^{3}/_{4}\, \triangle A, \quad \triangle B > {}^{3}/_{4}\, \triangle A.$$

Suponiendo ahora que sea δ el límite absoluto en los errores angulares, los máximos que pueden dar los triángulos en cuestion serán

$$\triangle_1 a = 2a\delta \text{ Cot. } {}^{1}/_{3}\, \pi$$

$$\triangle_2 a = a\delta$$

de donde

$$\frac{\triangle_1 a - \triangle_2 a}{\triangle_1 a} = 1 - {}^{1}/_{2} \text{ Tang. } {}^{1}/_{3}\, \pi$$

ó bien

$$\frac{\triangle_1 a - \triangle_2 a}{\triangle_1 a} = 0{,}1339.$$

Otra consideracion de bastante importancia viene tambien en apoyo del triángulo rectángulo. Consiste en ser este el que propaga mas disminuidos á sus lados los errores ocasionados en su base, bajo cuyo concepto llegarán estos tanto mas atenuados á los últimos lados, cuanto mayor sea el número de los triángulos que entren en la cadena. Para convencerse de esta verdad basta observar que tanto menor será el error

$$\triangle a = \triangle b \frac{\text{Sen. } A}{\text{Sen. } B}$$

que resulta en el lado a por el $\triangle b$ ocurrido en la base, cuanto mayor sea Sen. B, cuanto mas se aproxime á ser $B = {}^{1}/_{2}\, \pi$.

El triángulo rectángulo en B parece ser el que mas conviene, pero esta condicion no deja por sí sola completamente definida la forma. Se necesita otra que dé la relacion entre los ángulos A y C ó entre

sus lados opuestos a y c, y esta depende de la preferencia que merezca uno de estos sobre el otro, y por lo tanto del número de los triángulos que hayan de apoyar sobre cada uno de ellos.

El triángulo rectángulo, á pesar de sus conocidas ventajas, adolece de un inconveniente que le hace inaplicable en muchos casos. Aunque su forma disminuya los errores de los lados al propagarlos de uno en otro, conviene sin embargo sea lo menor posible su número, para que no se multipliquen los de observacion. Para esto sería preciso fuesen creciendo al principio y esta es una condicion á que no puede satisfacer. Es por lo tanto indispensable en semejantes casos separarnos de esta forma de modo que disminuya lo menos posible el ángulo B, y de aquí un problema de geometría que hay que resolver en cada caso; y véase con cuánta razon digimos no se debia esperar una solucion general para todos. Si por ejemplo, estando al principio de una cadena destinada á medir un arco de meridiano ó de paralelo, se quisiera creciesen los lados en la razon impropia $\frac{m}{n}$; bastaria determinar el máximo ángulo en la circunferencia de radio $\frac{m}{n}b$, y cuyos lados pasasen por el centro y por un punto distante de él la cantidad b.

Se supone en todas estas discusiones que somos árbitros de elegir á nuestro antojo los triángulos, lo que no es posible en la práctica; mas siempre seremos dueños de escojer entre los puntos que puedan servir de estacion el que menos se separe del que consideremos conveniente.

Madrid 20 de setiembre de 1851.

Antonio Terrero.